ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
1996

Un corrigé

I

1. (a) Notons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Posons $C = AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $D = BA = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$, donc :

$$\mathbf{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \mathbf{Tr}(BA).$$

(b) Soit P une matrice inversible telle que $B = PAP^{-1}$. D'après la dernière propriété ci-dessus, la matrice $A = P^{-1}(BP)$ a même trace que $BPP^{-1} = B$.

(c) Notons A et B les matrices de u et v respectivement dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors AB représente l'endomorphisme $u \circ v$ et BA représente l'endomorphisme $v \circ u$, donc d'après ce qui précède on a :

$$\mathbf{Tr}(u \circ v) = \mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA) = \mathbf{Tr}(v \circ u).$$

2. (a) Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est triangulaire supérieure, alors le polynôme caractéristique de A est $\prod_{k=1}^{n}(X - a_{a_{ii}})$, donc les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

(b) Si u nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. Le polynôme X^p est un polynôme annulateur de u. On sait que toute valeur propre de u est incluse dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur. La seule valeur propre possible de u est donc 0.
Mais la matrice A de u dans la base canonique est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de u. Donc A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et donc le polynôme caractéristique de u vaut X^n. La théorème de Cayley-Hamilton montre que $u^n = 0$ et donc u est nilpotent.

3. (a) On note $L_1, L_1, \ldots, L_p$ les lignes du déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}.$$

À la dernière ligne du déterminant $\mathrm{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, on ajoute une combinaison linéaire des lignes précédentes du type $L_p \leftarrow L_p + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i L_i$. La valeur du déterminant n'a pas changé mais sa dernière ligne s'écrit maintenant $(P(\lambda_1), ..., P(\lambda_p))$ où P est un polynôme unitaire de degré $p-1$. On choisit alors pour P le polynôme $P = \prod_{i=1}^{p-1}(X - \lambda_i)$ (qui est bien unitaire de degré $p-1$). La dernière ligne s'écrit alors $(0, ..., 0, P(\lambda_p))$ et donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p-1} & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-2} & \lambda_2^{p-2} & \dots & \lambda_{p-1}^{p-2} & \lambda_p^{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P(\lambda_p) \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant suivant cette dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\mathrm{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = P(\lambda_p)\mathrm{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) = \prod_{i=1}^{p-1}(\lambda_p - \lambda_i)\mathrm{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}).$$

En tenant compte de $\mathrm{V}(\lambda_1) = 1$, on obtient donc par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{C}^p,\ \mathrm{V}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = \prod_{1 \le i < j \le p}(\lambda_j - \lambda_i).$$

(b) Soit A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, la matrice A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de u.
Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux. Par suite, pour tout entier k, T^k est une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. Comme A^k et T^k sont semblables, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{Tr}(A^k) = \mathbf{Tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^k = 0.$$

où les $\mu_i,\ 1 \le i \le n$ sont les valeurs propres de u.
Supposons que u n'est pas nilpotent et qu'il possède p valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ deux à deux distincts, d'ordre de multiplicité $n_1, ..., n_p$. D'après ce qui précède on a les relations :

$$\begin{cases} n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + ... + n_p\lambda_p = 0 \\ n_1\lambda_1^2 + n_2\lambda_2^2 + ... + n_p\lambda_p^2 = 0 \\ \qquad\vdots \\ n_1\lambda_1^p + n_2\lambda_2^p + ... + n_p\lambda_p^p = 0 \end{cases}$$

Le système admet donc $(n_1, ..., n_p)$ comme solution non nulle (car u est supposé non nilpotent). On en déduit que le déterminant de ce système est nul. Mais

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & \dots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i\right) V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$$

On a donc abouti à une contradiction car les λ_i sont non nuls et distincts deux à deux. On en déduit que u est nilpotent.

II

1. D'après le théorème de Cayley-Hamilton u est racine de son polynôme caractéristique, et comme ce polynôme vaut $X^2 - \mathbf{Tr}(u)X + \det u$, alors $u^2 - \mathbf{Tr}(u)u + \det u\mathbf{Id}_E = 0$.

2. De la relation $u \circ v - v \circ u = u$ on obtient $\mathbf{Tr}(u) = 0$, d'où $u^2 + \det(u)\mathbf{Id}_E = 0$. Si u est inversible alors $v - u^{-1} \circ v \circ u = \mathbf{Id}_E$, donc $\mathbf{Tr}(\mathbf{Id}_E) = \mathbf{Tr}(v) - \mathbf{Tr}(u^{-1} \circ v \circ u) = 0$ ce qui est absurde. Donc u n'est pas inversible et par conséquent $\det(u) = 0$. Ainsi $u^2 = 0$.

3. (a) Comme $u \neq 0$ il existe $x_0 \in E$, non nul, tel que $u(x_0) \neq 0$. La famille $(u(x_0), x_0)$ est libre, en effet, si $\alpha u(x_0) + \beta x_0$, on appliquant u on obtient $\beta u(x_0) = 0$ puis $\beta = \alpha = 0$. Dans la base $\mathscr{B} = (u(x_0), x_0)$ la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Notons $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$. La relation $u \circ v - v \circ u = u$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $z = 0$, $t = x + 1$, donc $B = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = x$ et $a = y$.

(c) D'après la question précédente v admet deux valeurs propres distinctes λ et $\lambda + 1$, donc v est diagonalisable. Soit donc $\mathscr{C} = (x_1, x_2)$ une base de vecteurs propres de v telle que $v(x_1) = \lambda x_1$ et $v(x_2) = (\lambda+1)x_2$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$, alors comme précédemment on obtient $a = c = d = 0$, donc $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Considérons maintenant la base $\mathscr{B}' = (y_1, y_2)$ avec $y_1 = bx_1$ et $y_2 = x_2$ ($b \neq 0$ car u est non nul). On a $u(y_1) = u(bx_1) = bu(x_1) = 0$ et $u(y_2) = u(x_2) = bx_1 = y_1$, donc la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et celle de v dans la base de $\mathscr{B}'$ est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) On note $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de w dans la base $\mathscr{B}'$. La relation $u \circ w - w \circ u = u$ entraîne $W = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$. W s'écrit aussi sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} + (a - \lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où $w = v + \alpha \mathbf{Id}_E + \beta u$ avec $\alpha = a - \lambda$ et $\beta = b$.

(b) Si w est de la forme $v + \alpha \mathbf{Id}_E + \beta u$, alors on peut vérifier facilement la relation $u \circ w - w \circ u = u$.

5. Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme x dans $\mathscr{B}'$, on obtient $a = c = d = 0$ et donc $x = bu$.

III

1. On a $u^2 = u^2 \circ v - v \circ u^2 = u^2 \circ v - (u + v \circ u) \circ u = u^2 \circ v - u^2 - v \circ u^2$, d'où $u^2 \circ v - v \circ u^2 = 2u^2$. Montrons donc par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.
On a $ku^{k+1} = u^{k+1} \circ v - u \circ v \circ u^k = u^{k+1} \circ v - (u + v \circ u) \circ u^k = u^{k+1} \circ v - u^{k+1} - v \circ u^{k+1}$ et donc $u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} = (k+1)u^{k+1}$.

2. La relation $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$ montre que $\mathbf{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La question 3.b) de la première partie, montre que u est nilpotent.

3. (a) • Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. $x \in \ker u^k \Rightarrow u^k(x) = 0 \Rightarrow u(u^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in \ker u^{k+1}$. D'où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ker u^k \subset \ker u^{k+1}.$$

• Si $\ker u^p = \ker u^{p+1}$, on a déjà $\ker u^{p+1} \subset \ker u^{p+2}$. Montrons que $\ker u^{p+2} \subset \ker u^{p+1}$. Soit $x \in \ker u^{p+2}$. Alors $u^{p+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in \ker u^{p+1} = \ker u^p$. Donc, $u^k(u(x)) = 0$ ou encore x est dans $\ker u^{p+1}$. On a montré que

$$\ker u^p = \ker u^{p+1} \Rightarrow \ker u^{p+1} = \ker u^{p+2}.$$

Donc on peut déduire que, $\forall k \geq p$, $\ker u^k = \ker u^p$.

• La suite des noyaux itérés ne peut être strictement croissante pour l'inclusion car alors la suite des dimensions de ces noyaux serait une suite strictement croissante d'entiers naturels, vérifiant par une

récurrence facile $\dim\ker u^k \geq k$ pour tout naturel k, et en particulier $\dim\ker u^{n+1} > \dim E$ ce qui est exclu.
Donc il existe un entier k tel que $\ker u^k = \ker u^{k+1}$. Soit $p = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \ker u^k = \ker u^{k+1} \right\}$.

(b) En considérant la restriction de u à $\operatorname{Im} u^k$, et en lui appliquant le théorème du rang, on a :

$$\operatorname{rg} u^{k+1} = \operatorname{rg} u^k - \dim\left(\ker u \cap \operatorname{Im} u^k\right)$$

ce qui implique $\dim\ker u^{k+1} = \dim\ker u^k + \dim\left(\ker u \cap \operatorname{Im} u^k\right)$. D'où

$$\dim\ker u^k < \dim\ker u^{k+1} \leq \dim\ker u^k + 1;$$

car $\ker u \cap \operatorname{Im} u^k \subset \ker u$ et $\dim\ker u = 1$. Donc $\dim u^{k+1} = \dim u^k + 1$, et donc par récurrence $\dim u^k = k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
Si q désigne l'indice de nilpotence de u, alors $\ker u^{q-1} \subsetneq \ker u^q = E$, donc nécessairement $q = p = n$.

4. (a) D'après ce qui précède $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, soit donc $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Montrons que $\mathscr{B} = \left(u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), ..., u(x_0), x_0\right)$ est une base de E, et puisqu'il s'agit d'une famille à n éléments il suffit de montrer que la famille est libre.
En effet, si $\alpha_1 u^{n-1}(x_0) + \alpha_2 u^{n-2}(x_0) + ... + \alpha_{n-1}u(x_0) + \alpha_n x_0 = 0$, alors en appliquant u^{n-1} on obtient $\alpha_n u^{n-1}(x_0) = 0$ d'où $\alpha_n = 0$. Supposons donc $\alpha_n = \alpha_{n-1} = ... = \alpha_{n-k} = 0$, donc si on applique u^{n-k-2}, on obtient $\alpha_{n-k-1}u^{n-1}(x_0) = 0$ et donc $\alpha_{n-k-1} = 0$. Ainsi $\mathscr{B} = \left(u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), ..., u(x_0), x_0\right)$ est une famille libre, donc est une base de E.

(b) Les vecteurs $u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), ..., u^{n-k}(x_0)$ appartient à $\ker u^k$, de plus c'est une sous-famille d'une famille libre à k éléments et comme $\dim u^k = k$, alors il s'agit d'une base de $\ker u^k$.

(c) Si $x \in \ker u^k$, alors $u^k(v(x)) = ku^k(x) + v(u^k(x)) = 0$, donc $v(x) \in \ker u^k$. On a donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Vect}\left(u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), ..., u^{n-k}(x_0)\right)$ stable par v, ce qui montre que la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure.

5. (a) • On a $u\left(u^{n-1}(x_0)\right) = u^n(x_0) = 0$ et $u\left(u^{n-k}(x_0)\right) = u^{n-k+1}(x_0)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$. D'où :

$$\mathbf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

• Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. La $k+1$-ème colonne de la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par :

$$v\left(u^{n-k-1}(x_0)\right) = a_{1,k+1}u^{n-1}(x_0) + a_{2,k+1}u^{n-2}(x_0) + ... + a_{k,k+1}u^{n-k}(x_0) + a_{k+1,k+1}u^{n-k-1}(x_0).$$

En appliquant u et en utilisant le fait que $u^n = 0$, on obtient :

$$u \circ v\left(u^{n-k-1}(x_0)\right) = a_{2,k+1}u^{n-1}(x_0) + ... + a_{k,k+1}u^{n-k+1}(x_0) + a_{k+1,k+1}u^{n-k}(x_0).$$

Mais $u \circ v = v \circ u + u$, d'où :

$$v \circ u\left(u^{n-k-1}(x_0)\right) = a_{2,k+1}u^{n-1}(x_0) + ... + a_{k,k+1}u^{n-k+1}(x_0) + \left(a_{k+1,k+1} - 1\right)u^{n-k}(x_0).$$

ou encore

$$v\left(u^{n-k}(x_0)\right) = a_{2,k+1}u^{n-1}(x_0) + ... + a_{k,k+1}u^{n-k+1}(x_0) + \left(a_{k+1,k+1} - 1\right)u^{n-k}(x_0).$$

Comme

$$v\left(u^{n-k}(x_0)\right) = a_{1,k}u^{n-1}(x_0) + ... + a_{k-1,k}u^{n-k+1}(x_0) + a_{k,k}u^{n-k}(x_0).$$

Ainsi, par unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, $a_{i,k} = a_{i+1,k+1}$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$ et $a_{k+1,k+1} = a_{k,k} + 1 = a_{1,1} + k - 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi,

$$\mathbf{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{1,1}+1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1,1}+n-1 \end{pmatrix}$$

(b) D'après la question précédente $v = v_0 + a_{1,1}\mathbf{Id}_E + a_{12}u + a_{1,3}u^2 + ... + a_{1,n}u^{n-1} = v_0 + P(u)$ où $P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}X^{i-1} \in \mathbb{C}_n[X]$.

(c) v_0 admet n valeurs propres distinctes, donc il est diagonalisable. Soit donc $\mathscr{B}'' = (y_1, y_2, ..., y_n)$ une base de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de v_0 telle que $v_0(y_i) = (i-1)y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
La relation $u \circ v_0 - v_0 \circ u = u$ montre que $v_0(u(y_i)) = (i-2)u(y_i)$, donc $u(y_i)$ est un vecteur propre de v_0 associé à la valeur propre $i-2$ et comme les valeurs propres sont simples, alors $u(y_i)$ et y_{i-1} sont colinéaires, donc pour chaque $i \in [\![1, n-1]\!]$ il existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $u(y_{i+1}) = \lambda_i y_i$.
Pour $i = 1$, on a $v_0(y_1) = -u(y_1)$, mais -1 n'est pas une valeur propre de v_0, donc $u(y_1) = 0$. D'où la matrice de u dans la base $\mathscr{B}''$.

$$\mathbf{Mat}_{\mathscr{B}''}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6. On pose $u = \alpha u_1 + \beta v_1$ et $v = \dfrac{v_1}{\alpha}$. On a :

$$\begin{aligned} u \circ v - v \circ u &= (\alpha u_1 + \beta v_1) \circ \frac{v_1}{\alpha} - \frac{v_1}{\alpha} \circ (\alpha u_1 + \beta v_1) && (1) \\ &= u_1 v_1 + \frac{\beta}{\alpha} v_1 \circ v_1 - v_1 \circ u_1 - \frac{\beta}{\alpha} v_1 \circ v_1 && (2) \\ &= u_1 \circ v_1 - v_1 \circ u_1 && (3) \\ &= \alpha u_1 + \beta v_1 = u && (4) \end{aligned}$$

Donc le couple $\left(\alpha u_1 + \beta v_1, \dfrac{v_1}{\alpha}\right)$ est bien une solution de l'équation $u \circ v - v \circ u = u$.

•••••••••